Е.В. Журавлев, А.С. Кузьмина, Ю.Н. Мальцев

ОПИСАНИЕ МНОГООБРАЗИЙ КОЛЕЦ, В КОТОРЫХ КОНЕЧНЫЕ КОЛЬЦА ОДНОЗНАЧНО ОПРЕДЕЛЯЮТСЯ СВОИМИ ГРАФАМИ ДЕЛИТЕЛЕЙ НУЛЯ

В данной работе рассматриваются ассоциативные кольца (не обязательно коммутативные и не обязательно имеющие единицу).

Определение. *Графом делителей нуля кольца* R называется граф, вершинами которого являются все ненулевые делители нуля кольца (односторонние и двусторонние), причем две различные вершины x, y соединяются ребром тогда и только тогда, когда $xy = 0$ или $yx = 0$.

Обычно граф делителей нуля кольца R обозначается через $\Gamma(R)$. Мы также будем использовать это обозначение.

Понятие графа делителей нуля было введено в работе [6]. И. Бек ввел это понятие для *коммутативного* кольца и вершинами графа делителей нуля считал все элементы кольца. В статье [5] определение было изменено: в качестве вершин графа делителей нуля коммутативного кольца авторы этой работы рассматривали лишь ненулевые делители нуля. Затем понятие графа делителей нуля было распространено и на *некоммутативный* случай (см., например, [4]).

Нетрудно привести примеры неизоморфных колец, графы делителей нуля которых равны. Например, если A — счетномерная алгебра с нулевым умножением над полем $\mathbb{Z}_p$, а B — счетномерная алгебра с нулевым умножением над полем $\mathbb{Z}_q$, где p, q — это различные простые числа, то $\Gamma(A) \cong \Gamma(B)$, но $A \ncong B$. Другими словами, даже в многообразии $var\,\langle xy = 0\rangle$ существуют примеры бесконечных неизоморфных колец, графы делителей нуля которых имеют одинаковое строение. В связи с этим интерес представляет такой вопрос: при каких условиях из равенства графов делителей нуля следует изоморфизм колец? Некоторые результаты, дающие ответ на этот вопрос для коммутативных колец, были получены в работе [3]. В настоящей работе данная проблема исследуется на языке многообразий, а именно: исследуются многообразия ассоциативных колец, в которых каждое конечное кольцо однозначно определяется своим графом делителей нуля. Другими словами, изучаются свойства многообразия колец $\mathfrak{M}$, для которого из равенства $\Gamma(R) = \Gamma(S)$ для конечных колец $R, S \in \mathfrak{M}$, следует, что $R \cong S$. Ранее такие многообразия исследовались в работах [1, 7]. Однако полного описания получено не было. В настоящей же работе многообразия, в которых все конечные кольца однозначно определяются своими графами делителей нуля, полностью описаны.

Введем обозначения и понятия, используемые в настоящей работе.

Полным n–вершинным графом K_n называется граф (без петель и кратных ребер), все n вершин которого смежны между собой.

Пусть аддитивная группа кольца R разлагается в прямую сумму своих ненулевых аддитивных подгрупп A_i, где $i = 1, \ldots, n$ и $n \geq 2$, т.е. $R = A_1 \dot{+} \ldots \dot{+} A_n$. Если все подгруппы A_i являются двусторонними идеалами кольца R, то кольцо R называется *разложимым* (в обозначении $R = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$).

Порядок конечного кольца R мы будем обозначать через $|R|$. Для любого элемента $a \in R$, где R – произвольное кольцо, будем использовать следующее обозначение: $ann(a) = \{x \in R; xa = ax = 0\}$. Для любых элементов x, y кольца R положим $[x, y] = xy - yx$ и $x \circ y = xy + yx$. Через $\mathbb{Z}_n$ мы будем обозначать кольцо классов вычетов по модулю n. Для простого числа p будем полагать, что $N_{0,p} = \langle a \rangle, pa = 0, a^2 = 0$.

Пусть $\mathbb{Z}\langle X \rangle = \mathbb{Z}\langle x_1, x_2, \ldots \rangle$ – свободное ассоциативное кольцо от счетного числа переменных $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ и $f(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{Z}\langle X \rangle$. Многочлен $f(x_1, \ldots, x_d)$ *существенно зависит* от $x_1, x_2, \ldots, x_d$, если $f(0, x_2, \ldots, x_d) = \ldots = f(x_1, \ldots, x_{d-1}, 0) = 0$. Минимальная из степеней одночленов, входящих в запись $f(x_1, \ldots, x_d)$ с ненулевым коэффициентом, называется *нижней степенью многочлена* $f(x_1, \ldots, x_d)$.

Пусть $\mathfrak{M}$ – многообразие колец. Через $T(\mathfrak{M})$ будем обозначать множество всех многочленов из $\mathbb{Z}\langle X \rangle$, являющихся тождествами на всех кольцах из $\mathfrak{M}$. Назовем множество $T(\mathfrak{M})$ *идеалом тождеств* многообразия $\mathfrak{M}$. Если идеал тождеств $T(\mathfrak{M})$ порождается (как вполне характеристический идеал) многочленами $f_i, i \in I$, то будем использовать следующее обозначение: $T(\mathfrak{M}) = \{f_i \mid i \in I\}^T$. Через $\mathfrak{M} \vee \mathfrak{N}$ обозначается объединение многообразий $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$. Нетрудно заметить, что $T(\mathfrak{M} \vee \mathfrak{N}) = T(\mathfrak{M}) \cap T(\mathfrak{N})$.

Пусть $\mathfrak{M}_{1,p} = var \langle xyz = 0, x^2 = 0, px = 0 \rangle$ и $\mathfrak{M}_{2,p} = var \langle xyz = 0, [x, y] = 0, px = 0 \rangle$, где p — произвольное простое число. Заметим, что $\mathfrak{M}_{1,2} \subseteq \mathfrak{M}_{2,2}$, а при нечетном p мы имеем $\mathfrak{M}_{1,p} \cap \mathfrak{M}_{2,p} = var \langle xy = 0, px = 0 \rangle$. Далее, пусть F_i — приведенно свободное кольцо с шестью порождающими $\{x_1, \ldots, x_6\}$ многообразия $\mathfrak{M}_{i,p}$, $i = 1, 2$. Рассмотрим кольца

$$A_{i,p} = F_i / \langle x_3x_4 - x_1x_2 \rangle, B_{i,p} = F_i / \langle x_5x_6 - x_1x_2 - x_3x_4 \rangle,$$

где $\langle a, b, \ldots \rangle$ — это идеал кольца F_i, порожденный элементами $\{a, b, \ldots\}$, $i = 1, 2$. Наша ближайшая цель — доказать, что $\Gamma(A_{1,p}) \cong \Gamma(B_{1,p})$ для любого простого числа p и $\Gamma(A_{2,p}) \cong \Gamma(B_{2,p})$ при нечетном простом p.

По теореме Тарского любое ненулевое многообразие колец содержит одно из минимальных многообразий: $var\ \mathbb{Z}_p$ или $var\ N_{0,p}$, где p – некоторое простое число [8]. Оказывается, что в минимальных многообразиях $var\ \mathbb{Z}_p$ и $var\ N_{0,p}$, где p – любое простое число, все конечные кольца однозначно определяются своими графами делителей нуля так же, как и в многообразии $var\ N_{0,p_1} \vee \ldots \vee var\ N_{0,p_s}$ [1]. В многообразии $var\ N_{0,p_1} \vee \ldots \vee var\ N_{0,p_s} \vee var\ \mathbb{Z}_p$, где $p_1, \ldots, p_s$ – попарно различные простые числа, p –

любое простое число (возможно, совпадающее с одним из чисел p_i), каждое конечное кольцо однозначно определяется своим графом делителей нуля тогда и только тогда, когда $(p_i, p) \neq (3,2)$ при $i \leq s$ [1]. Наша цель — показать, что любое многообразие, в котором все конечные кольца однозначно определяются своими графами делителей нуля, является подмногообразием многообразия вида $var\ N_{0,p_1} \vee \ldots \vee var\ N_{0,p_s} \vee var\ \mathbb{Z}_p$, где $p_1, \ldots, p_s$ – попарно различные простые числа, p – любое простое число и $(p_i, p) \neq (3,2)$ при всех $i \leq s$. Для этого нам понадобятся некоторые вспомогательные утверждения.

Покажем сначала, что $\Gamma(A_{1,p}) \cong \Gamma(B_{1,p})$, в то время, как $A_{1,p} \ncong B_{1,p}$ для любого простого числа p.

Замечание. Порядок алгебр $A_{i,p}, B_{i,p}$, $i = 1, 2$, равен p^{14}. Возникает вопрос о существовании в указанных многообразиях примеров неизоморфных конечных колец небольшого порядка с одинаковыми графами делителей нуля. Однако нами было доказано, что в многообразии $\mathfrak{M}_{1,2}$ все конечные кольца порядка ≤ 64 однозначно определяются своими графами делителей нуля (фактически были полностью описаны все конечные кольца в многообразии $\mathfrak{M}_{1,2}$, порядок которых не превышает 64).

Лемма 1. *Множество $C_1 = \{\overline{x}_i\overline{x}_j;\ (i,j) \neq (3,4), 1 \leq i < j \leq 6\}$ является базисом алгебры $A^2_{1,p}$, где p — простое число.)*

Доказательство. Множество C_1 является системой образующих векторного пространства $A^2_{1,p}$. Докажем, что это множество линейно независимо. Если множество C_1 линейно зависимо, то существуют элементы $\alpha, \delta_{ij} \in \mathbb{Z}_p$, не все равные нулю, такие, что в алгебре F_1 справедливо равенство

$$\sum_{\substack{i<j \\ (i,j)\neq(3,4)}} \delta_{ij}x_ix_j = \alpha(x_3x_4 - x_1x_2). \tag{1}$$

Положим в этом равенстве $x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$. Тогда $\delta_{12} = -\alpha$, другими словами, $\sum\limits_{\substack{i<j \\ (i,j)\neq(3,4) \\ (i,j)\neq(1,2)}} \delta_{ij}x_ix_j = \alpha x_3x_4$. Положим $x_1 = x_2 = x_5 = x_6 = 0$. Получим, что $\alpha = 0$ и $\delta_{ij} = 0$ для всех i, j, таких, что $i < j$ и $(i,j) \neq (3,4), (1,2)$. Противоречие доказывает лемму. $\square$

Предложение 1. *Пусть $a = \sum\limits_{i=1}^{6} \alpha_i\overline{x}_i + u$, $b = \sum\limits_{i=1}^{6} \beta_i\overline{x}_i + v$ — произвольные элементы из кольца $A_{1,p}$, причем $u, v \in A^2_{1,p}$. Если $a, b \notin A^2_{1,p}$, то $ab = \overline{0}$ тогда и только тогда, когда $(\beta_1, \ldots, \beta_6) = \lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_6)$ для некоторого ненулевого элемента $\lambda \in \mathbb{Z}_p$.*

Доказательство. Пусть $(\beta_1, \ldots, \beta_6) = \lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_6)$, где $0 \neq \lambda \in \mathbb{Z}_p$. Тогда $a = c + u$, $b = \lambda c + v$ и $ab = \lambda c^2 = \overline{0}$, т.к. $x^2 = 0$ — тождество в алгебре $A_{1,p}$.

Докажем обратное утверждение. Пусть $ab=\overline{0}$. Тогда

$$ab=\left(\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\alpha_3 & \alpha_4\\ \beta_3 & \beta_4\end{vmatrix}\right)\overline{x}_1\overline{x}_2+\sum_{\substack{i<j\\(i,j)\neq(1,2)\\(i,j)\neq(3,4)}}\begin{vmatrix}\alpha_i & \alpha_j\\ \beta_i & \beta_j\end{vmatrix}\overline{x}_i\overline{x}_j=\overline{0}.$$

По лемме 1 множество $C_1=\{\overline{x}_i\overline{x}_j;\ (i,j)\neq(3,4), i<j\}$ — базис векторного пространства $A^2_{1,p}$. Поэтому получаем, что

$$\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\alpha_3 & \alpha_4\\ \beta_3 & \beta_4\end{vmatrix}=0 \text{ и } \begin{vmatrix}\alpha_i & \alpha_j\\ \beta_i & \beta_j\end{vmatrix}=0,$$

где $i<j, (i,j)\neq(1,2)$ и $(i,j)\neq(3,4)$.

Рассмотрим следующие случаи.

Случай 1. Пусть $\alpha_1\neq 0$.

Поскольку

$$\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_3\\ \beta_1 & \beta_3\end{vmatrix}=0, \begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_4\\ \beta_1 & \beta_4\end{vmatrix}=0,$$

то вторые строки этих определителей линейно выражаются через первые, т.е. $\beta_1=\lambda\alpha_1$, $\beta_3=\lambda\alpha_3$ и $\beta_1=\mu\alpha_1$, $\beta_4=\mu\alpha_4$ для некоторых элементов $\lambda,\mu\in\mathbb{Z}_p$. Поскольку $\alpha_1\neq 0$ и $(\lambda-\mu)\alpha_1=\beta_1-\beta_1=0$, то $\lambda=\mu$ и $\beta_4=\lambda\alpha_4$. Аналогично доказывается, что $\beta_5=\lambda\alpha_5$ и $\beta_6=\lambda\alpha_6$.

Далее, из равенств $\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\alpha_3 & \alpha_4\\ \beta_3 & \beta_4\end{vmatrix}=0$, $\beta_3=\lambda\alpha_3$ и $\beta_4=\lambda\alpha_4$ следует, что $\begin{vmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\\ \beta_1 & \beta_2\end{vmatrix}=0$ и, значит, $\beta_2=\lambda\alpha_2$. Таким образом, $(\beta_1,\dots,\beta_6)=\lambda(\alpha_1,\dots,\alpha_6)$.

Случай 2. Пусть $\alpha_1=0$.

Если хотя бы один из элементов $\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ не равен нулю, то рассуждаем так же, как при рассмотрении случая 1. Поэтому можем полагать, что $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=0$ и, например, $\alpha_5\neq 0$. (Заметим, что поскольку $a\notin A^2_{1,p}$, то один из элементов α_5 или α_6 отличен от нуля.) Аналогично мы можем считать, что $\beta_1=\beta_2=\beta_3=\beta_4=0$. Следовательно,

$$ab=\begin{vmatrix}\alpha_5 & \alpha_6\\ \beta_5 & \beta_6\end{vmatrix}\overline{x}_5\overline{x}_6=\overline{0}, \text{ или } \begin{vmatrix}\alpha_5 & \alpha_6\\ \beta_5 & \beta_6\end{vmatrix}=0,$$

т.е. $\beta_5=\lambda\alpha_5$, $\beta_6=\lambda\alpha_6$ для некоторого ненулевого элемента $\lambda\in\mathbb{Z}_p$. Таким образом, $(\beta_1,\dots,\beta_6)=\lambda(\alpha_1,\dots,\alpha_6)$. $\square$

Из предложения 1 получаем, что для каждого элемента $a=\sum_{i=1}^{6}\alpha_i\overline{x}_i\in A_{1,p}\setminus A^2_{1,p}$ множество $\{\alpha a+u;\ 0\neq\alpha\in\mathbb{Z}_p, u\in A^2_{1,p}\}$ образует полный подграф Γ_a графа $\Gamma(A_{1,p})$, причем каждая вершина подграфа Γ_a смежна только с вершинами этого подграфа и элементами из множества $A^2_{1,p}$. Покажем, что такое же строение имеет граф $\Gamma(B_{1,p})$.

Лемма 2. *Множество* $D_1 = \{\overline{x}_i\overline{x}_j;\ (i,j) \neq (5,6), 1 \leq i < j \leq 6\}$ *является базисом алгебры* $B_{1,p}^2$ *для любого простого числа* p.

Доказательство аналогично доказательству леммы 1.

Предложение 2. *Пусть* $a = \sum\limits_{i=1}^{6} \alpha_i \overline{x}_i + u$, $b = \sum\limits_{i=1}^{6} \beta_i \overline{x}_i + v$ *— произвольные элементы из кольца* $B_{1,p}$, *где* $u, v \in B_{1,p}^2$. *Если* $a, b \notin B_{1,p}^2$, *то* $ab = \overline{0}$ *тогда и только тогда, когда* $(\beta_1, \ldots, \beta_6) = \lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_6)$ *для некоторого ненулевого элемента* $\lambda \in \mathbb{Z}_p$.

Доказательство. Пусть $(\beta_1, \ldots, \beta_6) = \lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_6)$, где $0 \neq \lambda \in \mathbb{Z}_p$. Тогда $a = c + u$, $b = \lambda c + v$ и $ab = \lambda c^2 = \overline{0}$, т.к. $x^2 = 0$ для любого элемента $x \in B_{1,p}$.

Докажем обратное утверждение. Пусть $ab = \overline{0}$. Тогда

$$ab = \left(\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_5 & \alpha_6 \\ \beta_5 & \beta_6 \end{vmatrix} \right) \overline{x}_1\overline{x}_2 + \left(\begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_5 & \alpha_6 \\ \beta_5 & \beta_6 \end{vmatrix} \right) \overline{x}_3\overline{x}_4 + \\ + \sum_{\substack{i<j \\ (i,j)\neq(1,2) \\ (i,j)\neq(3,4) \\ (i,j)\neq(5,6)}} \begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_j \\ \beta_i & \beta_j \end{vmatrix} \overline{x}_i\overline{x}_j = 0.$$

По лемме 2 множество $D_1 = \{\overline{x}_i\overline{x}_j;\ (i,j) \neq (5,6), i < j\}$ — базис векторного пространства $B_{1,p}^2$. Поэтому

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_5 & \alpha_6 \\ \beta_5 & \beta_6 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_3 & \beta_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_5 & \alpha_6 \\ \beta_5 & \beta_6 \end{vmatrix} = 0 \text{ и } \begin{vmatrix} \alpha_i & \alpha_j \\ \beta_i & \beta_j \end{vmatrix} = 0,$$

если $i < j, (i,j) \neq (1,2), (i,j) \neq (3,4)$ и $(i,j) \neq (5,6)$.

Так же, как при доказательстве предложения 1, рассмотрим два случая.

Случай 1. Пусть $\alpha_1 \neq 0$.

Аналогично тому, как это было сделано в доказательстве предложения 1, получаем, что $\beta_i = \lambda\alpha_i$ для любого $i \neq 2$. Поэтому из равенства $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha_5 & \alpha_6 \\ \beta_5 & \beta_6 \end{vmatrix} = 0$ вытекает равенство $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0$. Отсюда следует, что $\beta_2 = \lambda\alpha_2$. Таким образом, при $\alpha_1 \neq 0$ мы имеем, что $(\beta_1, \ldots, \beta_6) = \lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_6)$.

Случай 2. Пусть $\alpha_1 = 0$.

Если хотя бы один из элементов $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ не равен нулю, то рассуждаем так же, как в случае 1. Поэтому можем считать, что $\alpha_i = \beta_j = 0$ при $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Значит,

$$ab = (\alpha_5\overline{x}_5 + \alpha_6\overline{x}_6)(\beta_5\overline{x}_5 + \beta_6\overline{x}_6) = \begin{vmatrix} \alpha_5 & \alpha_6 \\ \beta_5 & \beta_6 \end{vmatrix} (\overline{x}_1\overline{x}_2 + \overline{x}_3\overline{x}_4) = \overline{0}.$$

Поскольку $a \notin B_{1,p}^2$, то, например, $\alpha_5 \neq 0$. Таким образом, $\beta_5 = \lambda\alpha_5$, $\beta_6 = \lambda\alpha_6$ для некоторого ненулевого элемента $\lambda \in \mathbb{Z}_p$, т.е. $(\beta_1, \ldots, \beta_6) = \lambda(\alpha_1, \ldots, \alpha_6)$. $\square$

Таким образом, справедливо

Следствие 1. $\Gamma(A_{1,p}) \cong \Gamma(B_{1,p})$ *для любого простого числа* p.

Предложение 3. *Алгебра* $A_{1,p}$ *не изоморфна алгебре* $B_{1,p}$ *для любого простого числа* p.

Доказательство. Предположим противное: существует изоморфизм φ алгебры $B_{1,p}$ на алгебру $A_{1,p}$. Введем такие обозначения: $\overline{x_i} = x_i + \langle x_1x_2 + x_3x_4 - x_5x_6\rangle \in B_{1,p}$ и $\overline{x}'_i = x_i + \langle x_1x_2 - x_3x_4\rangle \in A_{1,p}$, $i = \overline{1,6}$. Заметим что $\varphi(B^2_{1,p}) \subseteq A^2_{1,p}$, а значит, отображение $\overline{\varphi} : B_{1,p}/B^2_{1,p} \to A_{1,p}/A^2_{1,p}$, определенное по правилу $\overline{\varphi}(a + B^2_{1,p}) = = \varphi(a) + A^2_{1,p}$, $a \in B_{1,p}$, также является изоморфизмом. Отсюда следует, что существует невырожденная матрица $P = (p_{ij})_{6\times 6}$, $p_{ij} \in \mathbb{Z}_p$, такая, что

$$\begin{cases}
\varphi(\overline{x}_1) = p_{11}\overline{x}'_1 + p_{21}\overline{x}'_2 + p_{31}\overline{x}'_3 + p_{41}\overline{x}'_4 + p_{51}\overline{x}'_5 + p_{61}\overline{x}'_6 + b_1;\\
\varphi(\overline{x}_2) = p_{12}\overline{x}'_1 + p_{22}\overline{x}'_2 + p_{32}\overline{x}'_3 + p_{42}\overline{x}'_4 + p_{52}\overline{x}'_5 + p_{62}\overline{x}'_6 + b_2;\\
\varphi(\overline{x}_3) = p_{13}\overline{x}'_1 + p_{23}\overline{x}'_2 + p_{33}\overline{x}'_3 + p_{43}\overline{x}'_4 + p_{53}\overline{x}'_5 + p_{63}\overline{x}'_6 + b_3;\\
\varphi(\overline{x}_4) = p_{14}\overline{x}'_1 + p_{24}\overline{x}'_2 + p_{34}\overline{x}'_3 + p_{44}\overline{x}'_4 + p_{54}\overline{x}'_5 + p_{64}\overline{x}'_6 + b_4;\\
\varphi(\overline{x}_5) = p_{15}\overline{x}'_1 + p_{25}\overline{x}'_2 + p_{35}\overline{x}'_3 + p_{45}\overline{x}'_4 + p_{55}\overline{x}'_5 + p_{65}\overline{x}'_6 + b_5;\\
\varphi(\overline{x}_6) = p_{16}\overline{x}'_1 + p_{26}\overline{x}'_2 + p_{36}\overline{x}'_3 + p_{46}\overline{x}'_4 + p_{56}\overline{x}'_5 + p_{66}\overline{x}'_6 + b_6,
\end{cases}$$

где b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 – некоторые элементы из $A^2_{1,p}$.

Учитывая свойства изоморфизма, получаем

$$\varphi(\overline{x}_1\overline{x}_2 + \overline{x}_3\overline{x}_4 - \overline{x}_5\overline{x}_6) =$$
$$= (p_{11}\overline{x}'_1 + p_{21}\overline{x}'_2 + p_{31}\overline{x}'_3 + p_{41}\overline{x}'_4 + p_{51}\overline{x}'_5 + p_{61}\overline{x}'_6)(p_{12}\overline{x}'_1 + p_{22}\overline{x}'_2 + p_{32}\overline{x}'_3 + p_{42}\overline{x}'_4 + p_{52}\overline{x}'_5 + p_{62}\overline{x}'_6)+$$
$$+(p_{13}\overline{x}'_1 + p_{23}\overline{x}'_2 + p_{33}\overline{x}'_3 + p_{43}\overline{x}'_4 + p_{53}\overline{x}'_5 + p_{63}\overline{x}'_6)(p_{14}\overline{x}'_1 + p_{24}\overline{x}'_2 + p_{34}\overline{x}'_3 + p_{44}\overline{x}'_4 + p_{54}\overline{x}'_5 + p_{64}\overline{x}'_6)-$$
$$-(p_{15}\overline{x}'_1 + p_{25}\overline{x}'_2 + p_{35}\overline{x}'_3 + p_{45}\overline{x}'_4 + p_{55}\overline{x}'_5 + p_{65}\overline{x}'_6)(p_{16}\overline{x}'_1 + p_{26}\overline{x}'_2 + p_{36}\overline{x}'_3 + p_{46}\overline{x}'_4 + p_{56}\overline{x}'_5 + p_{66}\overline{x}'_6) =$$
$$= (p_{11}p_{62} - p_{12}p_{61} + p_{13}p_{64} - p_{14}p_{63} - p_{15}p_{66} + p_{16}p_{65})\overline{x}'_1\overline{x}'_6+$$
$$+(p_{21}p_{62} - p_{22}p_{61} + p_{23}p_{64} - p_{24}p_{63} - p_{25}p_{66} + p_{26}p_{65})\overline{x}'_2\overline{x}'_6+$$
$$+(p_{31}p_{62} - p_{32}p_{61} + p_{33}p_{64} - p_{34}p_{63} - p_{35}p_{66} + p_{36}p_{65})\overline{x}'_3\overline{x}'_6+$$
$$+(p_{41}p_{62} - p_{42}p_{61} + p_{43}p_{64} - p_{44}p_{63} - p_{45}p_{66} + p_{46}p_{65})\overline{x}'_4\overline{x}'_6+$$
$$+(p_{51}p_{62} - p_{52}p_{61} + p_{53}p_{64} - p_{54}p_{63} - p_{55}p_{66} + p_{56}p_{65})\overline{x}'_5\overline{x}'_6+$$
$$+f(\overline{x}'_1, \overline{x}'_2, \overline{x}'_3, \overline{x}'_4, \overline{x}'_5) = 0,$$

где $f(\overline{x}'_1, \overline{x}'_2, \overline{x}'_3, \overline{x}'_4, \overline{x}'_5)$ – некоторый многочлен от переменных $\overline{x}'_1$, $\overline{x}'_2$, $\overline{x}'_3$, $\overline{x}'_4$, $\overline{x}'_5$, не содержащий переменную $\overline{x}'_6$. Так как $\overline{x}'_1\overline{x}'_6$, $\overline{x}'_2\overline{x}'_6$, $\overline{x}'_3\overline{x}'_6$, $\overline{x}'_4\overline{x}'_6$, $\overline{x}'_5\overline{x}'_6$, линейно независимы,

то

$$p_{11}p_{62} - p_{12}p_{61} + p_{13}p_{64} - p_{14}p_{63} - p_{15}p_{66} + p_{16}p_{65} = 0;$$
$$p_{21}p_{62} - p_{22}p_{61} + p_{23}p_{64} - p_{24}p_{63} - p_{25}p_{66} + p_{26}p_{65} = 0;$$
$$p_{31}p_{62} - p_{32}p_{61} + p_{33}p_{64} - p_{34}p_{63} - p_{35}p_{66} + p_{36}p_{65} = 0;$$
$$p_{41}p_{62} - p_{42}p_{61} + p_{43}p_{64} - p_{44}p_{63} - p_{45}p_{66} + p_{46}p_{65} = 0;$$
$$p_{51}p_{62} - p_{52}p_{61} + p_{53}p_{64} - p_{54}p_{63} - p_{55}p_{66} + p_{56}p_{65} = 0.$$

Добавив очевидное равенство, получим

$$p_{11}p_{62} - p_{12}p_{61} + p_{13}p_{64} - p_{14}p_{63} - p_{15}p_{66} + p_{16}p_{65} = 0;$$
$$p_{21}p_{62} - p_{22}p_{61} + p_{23}p_{64} - p_{24}p_{63} - p_{25}p_{66} + p_{26}p_{65} = 0;$$
$$p_{31}p_{62} - p_{32}p_{61} + p_{33}p_{64} - p_{34}p_{63} - p_{35}p_{66} + p_{36}p_{65} = 0;$$
$$p_{41}p_{62} - p_{42}p_{61} + p_{43}p_{64} - p_{44}p_{63} - p_{45}p_{66} + p_{46}p_{65} = 0;$$
$$p_{51}p_{62} - p_{52}p_{61} + p_{53}p_{64} - p_{54}p_{63} - p_{55}p_{66} + p_{56}p_{65} = 0;$$
$$p_{61}p_{62} - p_{62}p_{61} + p_{63}p_{64} - p_{64}p_{63} - p_{65}p_{66} + p_{66}p_{65} = 0.$$

Отсюда

$$(p_{62}, -p_{61}, p_{64}, -p_{63}, -p_{66}, p_{65}) \cdot P^T = 0.$$

Матрица P невырожденная и, в частности, не имеет нулевых строк, а значит, полученное равенство невозможно. Противоречие доказывает предложение. □

Из следствия 1 и предложения 3 вытекает справедливость следующего утверждения.

Следствие 2. *Если в многообразии колец $\mathfrak{M}$ все конечные кольца однозначно определяются своими графами делителей нуля, то для любого простого числа p многообразие $\mathfrak{M}$ не содержит многообразия $\mathfrak{M}_{1,p}$.*

Далее, покажем, что алгебры $A_{2,p}$ и $B_{2,p}$ не изоморфны для любого простого нечетного p, однако $\Gamma(A_{2,p}) \cong \Gamma(B_{2,p})$. Для этого нам понадобятся некоторые вспомогательные леммы.

Лемма 3. *Множество $C_2 = \{\overline{x}_k{}^2, \overline{x}_i\overline{x}_j;\ (i,j) \neq (3,4), 1 \leq i < j \leq 6, 1 \leq k \leq 6\}$ является базисом алгебры $A_{2,p}^2$ ($p > 2$.)*

Доказательство. Множество C_2 является системой образующих векторного пространства $A_{2,p}^2$. Если оно линейно зависимо, то существуют элементы $\alpha, \gamma_1, \ldots, \gamma_6, \delta_{ij} \in \mathbb{Z}_p$, не все равные нулю, такие, что в алгебре F_2 справедливо равенство

$$\sum_{i=1}^{6} \gamma_i x_i^2 + \sum_{\substack{i<j \\ (i,j)\neq(3,4)}} \delta_{ij} x_i x_j = \alpha(x_3x_4 - x_1x_2). \tag{2}$$

Полагая в равенстве (1) $x_1 = \ldots = x_{i-1} = x_{i+1} = \ldots = x_6$, где $1 \le i \le 6$, получим, что $\gamma_i x_i^2 = 0$, т.е. $\gamma_1 = \ldots = \gamma_6 = 0$. Положим теперь в равенстве (1) $x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$. Тогда $\delta_{12} = -\alpha$, другими словами, $\sum\limits_{\substack{i<j \\ (i,j)\neq(3,4) \\ (i,j)\neq(1,2)}} \delta_{ij}x_ix_j = \alpha x_3x_4$. Положим, наконец, $x_1 = x_2 = x_5 = x_6 = 0$. Получим, что $\alpha = 0$ и $\delta_{ij} = 0$ для всех i, j, таких, что $i < j$ и $(i,j) \neq (3,4), (1,2)$. □

Лемма 4. *Если $a = \sum\limits_{i=1}^{6} \alpha_i \overline{x}_i + u \in A_{2,p}$, где $p > 2$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}_p$ для всех чисел $i \in \{1, \ldots, 6\}$, $u \in A^2_{2,p}$, $a \notin A^2_{2,p}$, то $ann(a) = A^2_{2,p}$.*

Доказательство. Пусть $b = \sum\limits_{i=1}^{6} \beta_i \overline{x}_i + v \in ann(a)$, где $\beta_i \in \mathbb{Z}_p$, $i \in \{1, \ldots, 6\}$, $v \in A^2_{2,p}$. Тогда

$$\overline{0} = ab = \left(\sum_{i=1}^{6} \alpha_i \overline{x}_i\right)\left(\sum_{i=1}^{6} \beta_i \overline{x}_i\right) =$$
$$= \sum_{i=1}^{6} \alpha_i\beta_i \overline{x}_i^{\,2} + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_4 + \alpha_4\beta_3)\,\overline{x}_1\overline{x}_2 + \sum_{\substack{i<j \\ (i,j)\neq(1,2) \\ (i,j)\neq(3,4)}} (\alpha_i\beta_j + \alpha_j\beta_i)\,\overline{x}_i\overline{x}_j.$$

Из леммы 3 следует, что

$$\alpha_1\beta_1 = \ldots = \alpha_6\beta_6 = 0, \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_4 + \alpha_4\beta_3 = 0 \text{ и } \alpha_i\beta_j + \alpha_j\beta_i = 0$$

для всех $i, j \in \{1, \ldots, 6\}$, таких, что $i < j$, $(i,j) \neq (1,2)$ и $(i,j) \neq (3,4)$.

Пусть $\alpha_1 \neq 0$. Тогда из равенств $\alpha_1\beta_1 = 0$ и $\alpha_1\beta_i + \alpha_i\beta_1 = 0$, где $i = 3, 4, 5, 6$, получаем, что $\beta_1 = 0$ и $\beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = 0$. Далее, из равенства $\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_3\beta_4 + \alpha_4\beta_3 = 0$ следует, что $\alpha_1\beta_2 = 0$, т.е. $\beta_2 = 0$. Другими словами, мы показали, что в этом случае $b = v \in A^2_{2,p}$.

Расссмотрим теперь случай, когда $\alpha_1 = 0$. Ввиду доказанного выше, можем считать, что $\alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$. Значит, имеем равенства $\alpha_5\beta_5 = \alpha_6\beta_6 = 0$, $\alpha_5\beta_6 + \alpha_6\beta_5 = 0$. Поскольку $a \notin A^2_{2,p}$, то $\alpha_6 \neq 0$ или $\alpha_5 \neq 0$. Пусть $\alpha_5 \neq 0$. Тогда из равенства $\alpha_5\beta_5 = 0$ получаем, что $\beta_5 = 0$. Поэтому $\alpha_5\beta_6 = 0$. Отсюда $\beta_6 = 0$. Другими словами, $b \in A^2_{2,p}$. Случай, когда $\alpha_6 \neq 0$ рассматривается аналогично. □

Таким образом, граф $\Gamma(A_{2,p})$ имеет следующее строение: множество ненулевых элементов из множества $A^2_{2,p}$ образуют полный подграф, а любая вершина $a \in A_{2,p} \setminus A^2_{2,p}$ смежна со всеми вершинами из этого подграфа и только с ними.

Для алгебры $B_{2,p}$ $(p > 2)$ справедливы аналоги лемм 3–4.

Лемма 5. *Множество $D_2 = \{\overline{x}_k^{\,2}, \overline{x}_i\overline{x}_j;\ (i,j) \neq (5,6), 1 \le i < j \le 6, 1 \le k \le 6\}$ является базисом алгебры $B^2_{2,p}$ $(p > 2.)$*

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.

Лемма 6. *Пусть* $a = \sum\limits_{i=1}^{6} \alpha_i \overline{x}_i + u \in B_{2,p}$, *где* $p > 2$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}_p$ *для всех чисел* $i \in \{1, \ldots, 6\}$, $u \in B_{2,p}^2$ *и* $a \notin B_{2,p}^2$. *Тогда* $ann(a) = B_{2,p}^2$.

Доказательство. Возьмем элемент $b = \sum\limits_{i=1}^{6} \beta_i \overline{x}_i + v \in ann(a)$, где $\beta_i \in \mathbb{Z}_p$ для всех чисел $i \in \{1, \ldots, 6\}$ и $v \in A_{2,p}^2$. Получаем

$$\overline{0} = ab = \sum_{i=1}^{6} \alpha_i \beta_i {\overline{x}_i}^2 + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_5\beta_6 + \alpha_6\beta_5)\, \overline{x}_1\overline{x}_2 + \\ + (\alpha_3\beta_4 + \alpha_4\beta_3 + \alpha_5\beta_6 + \alpha_6\beta_5)\, \overline{x}_3\overline{x}_4 + \sum_{\substack{i<j \\ (i,j)\neq(1,2) \\ (i,j)\neq(3,4) \\ (i,j)\neq(5,6)}} (\alpha_i\beta_j + \alpha_j\beta_i)\, \overline{x}_i\overline{x}_j.$$

Из леммы 5 следует, что

$$\alpha_1\beta_1 = \ldots = \alpha_6\beta_6 = 0, \alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_5\beta_6 + \alpha_6\beta_5 = 0, \\ \alpha_3\beta_4 + \alpha_4\beta_3 + \alpha_5\beta_6 + \alpha_6\beta_5 = 0 \text{ и } \alpha_i\beta_j + \alpha_j\beta_i = 0$$

для всех $i, j \in \{1, \ldots, 6\}$, таких, что $i < j$ и $(i, j) \neq (1, 2), (3, 4), (5, 6)$.

Предположим, что $\alpha_1 \neq 0$. Из равенства $\alpha_1\beta_1 = 0$ получаем, что $\beta_1 = 0$. Далее, из равенств $\alpha_1\beta_i + \alpha_i\beta_1 = 0$, $i = 3, 4, 5, 6$, следует, что $\beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \beta_6 = 0$. Наконец, из равенства $\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1 + \alpha_5\beta_6 + \alpha_6\beta_5 = 0$ вытекает, что $\beta_2 = 0$. Таким образом, $b = v \in B_{2,p}^2$.

Аналогично рассматриваются случаи, когда отличен от нуля один из коэффициентов $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. Итак, мы можем полагать, что $\alpha_i = 0$ для $i = 1, 2, 3, 4$. Так как $a \notin A_{2,p}^2$, то $\alpha_6 \neq 0$ или $\alpha_5 \neq 0$. Предположим, что $\alpha_5 \neq 0$. Из равенства $\alpha_5\beta_5 = 0$ получаем, что $\beta_5 = 0$. Следовательно, $\alpha_5\beta_6 = 0$, т.е. и $\beta_6 = 0$. Из равенств $\alpha_i\beta_5 + \alpha_5\beta_i = 0$, где $i = 1, 2, 3, 4$, следует, что $\beta_i = 0$ для $i = 1, 2, 3, 4$. Значит, $b = v \in B_{2,p}^2$. $\square$

Из лемм 4 и 6 получаем

Следствие 3. $\Gamma(A_{2,p}) \cong \Gamma(B_{2,p})$ *для любого простого нечетного числа* p.

Предложение 4. *Алгебра* $A_{2,p}$ *не изоморфна алгебре* $B_{2,p}$ *для любого простого нечетного числа* p.

Доказательство. Предположим противное. Пусть φ – изоморфизм $B_{2,p}$ на $A_{2,p}$. Обозначим $\overline{x_i} = x_i + \langle x_1x_2 + x_3x_4 - x_5x_6 \rangle \in B_{2,p}$ и $\overline{x}'_i = x_i + \langle x_1x_2 - x_3x_4 \rangle \in A_{2,p}$, $i = \overline{1, 6}$. Заметим что $\varphi(B_{2,p}^2) \subseteq A_{2,p}^2$, а значит, отображение $\overline{\varphi} : B_{2,p}/B_{2,p}^2 \to A_{2,p}/A_{2,p}^2$, определенное по правилу $\overline{\varphi}(a + B_{2,p}^2) = \varphi(a) + A_{2,p}^2$, $a \in B_{2,p}$, также является изоморфизмом.

Отсюда следует, что существует невырожденная матрица $P=(p_{ij})_{6\times 6}$, $p_{ij}\in\mathbb{Z}_p$, такая, что

$$\begin{cases}\varphi(\overline{x}_1)=p_{11}\overline{x}'_1+p_{21}\overline{x}'_2+p_{31}\overline{x}'_3+p_{41}\overline{x}'_4+p_{51}\overline{x}'_5+p_{61}\overline{x}'_6+b_1;\\ \varphi(\overline{x}_2)=p_{12}\overline{x}'_1+p_{22}\overline{x}'_2+p_{32}\overline{x}'_3+p_{42}\overline{x}'_4+p_{52}\overline{x}'_5+p_{62}\overline{x}'_6+b_2;\\ \varphi(\overline{x}_3)=p_{13}\overline{x}'_1+p_{23}\overline{x}'_2+p_{33}\overline{x}'_3+p_{43}\overline{x}'_4+p_{53}\overline{x}'_5+p_{63}\overline{x}'_6+b_3;\\ \varphi(\overline{x}_4)=p_{14}\overline{x}'_1+p_{24}\overline{x}'_2+p_{34}\overline{x}'_3+p_{44}\overline{x}'_4+p_{54}\overline{x}'_5+p_{64}\overline{x}'_6+b_4;\\ \varphi(\overline{x}_5)=p_{15}\overline{x}'_1+p_{25}\overline{x}'_2+p_{35}\overline{x}'_3+p_{45}\overline{x}'_4+p_{55}\overline{x}'_5+p_{65}\overline{x}'_6+b_5;\\ \varphi(\overline{x}_6)=p_{16}\overline{x}'_1+p_{26}\overline{x}'_2+p_{36}\overline{x}'_3+p_{46}\overline{x}'_4+p_{56}\overline{x}'_5+p_{66}\overline{x}'_6+b_6,\end{cases}$$

где b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6 – некоторые элементы из $A^2_{2,p}$.

Учитывая свойства изоморфизма, имеем

$$\varphi(\overline{x}_1\overline{x}_2+\overline{x}_3\overline{x}_4-\overline{x}_5\overline{x}_6)=$$

$$=(p_{11}\overline{x}'_1+p_{21}\overline{x}'_2+p_{31}\overline{x}'_3+p_{41}\overline{x}'_4+p_{51}\overline{x}'_5+p_{61}\overline{x}'_6)(p_{12}\overline{x}'_1+p_{22}\overline{x}'_2+p_{32}\overline{x}'_3+p_{42}\overline{x}'_4+p_{52}\overline{x}'_5+p_{62}\overline{x}'_6)+$$
$$+(p_{13}\overline{x}'_1+p_{23}\overline{x}'_2+p_{33}\overline{x}'_3+p_{43}\overline{x}'_4+p_{53}\overline{x}'_5+p_{63}\overline{x}'_6)(p_{14}\overline{x}'_1+p_{24}\overline{x}'_2+p_{34}\overline{x}'_3+p_{44}\overline{x}'_4+p_{54}\overline{x}'_5+p_{64}\overline{x}'_6)-$$
$$-(p_{15}\overline{x}'_1+p_{25}\overline{x}'_2+p_{35}\overline{x}'_3+p_{45}\overline{x}'_4+p_{55}\overline{x}'_5+p_{65}\overline{x}'_6)(p_{16}\overline{x}'_1+p_{26}\overline{x}'_2+p_{36}\overline{x}'_3+p_{46}\overline{x}'_4+p_{56}\overline{x}'_5+p_{66}\overline{x}'_6)=$$
$$\begin{aligned}&=(p_{11}p_{62}+p_{12}p_{61}+p_{13}p_{64}+p_{14}p_{63}-p_{15}p_{66}-p_{16}p_{65})\overline{x}'_1\overline{x}'_6+\\ &+(p_{21}p_{62}+p_{22}p_{61}+p_{23}p_{64}+p_{24}p_{63}-p_{25}p_{66}-p_{26}p_{65})\overline{x}'_2\overline{x}'_6+\\ &+(p_{31}p_{62}+p_{32}p_{61}+p_{33}p_{64}+p_{34}p_{63}-p_{35}p_{66}-p_{36}p_{65})\overline{x}'_3\overline{x}'_6+\\ &+(p_{41}p_{62}+p_{42}p_{61}+p_{43}p_{64}+p_{44}p_{63}-p_{45}p_{66}-p_{46}p_{65})\overline{x}'_4\overline{x}'_6+\\ &+(p_{51}p_{62}+p_{52}p_{61}+p_{53}p_{64}+p_{54}p_{63}-p_{55}p_{66}-p_{56}p_{65})\overline{x}'_5\overline{x}'_6+\\ &+(p_{61}p_{62}+p_{63}p_{64}-p_{65}p_{66})\overline{x}'_6\overline{x}'_6+f(\overline{x}'_1,\overline{x}'_2,\overline{x}'_3,\overline{x}'_4,\overline{x}'_5)=0,\end{aligned}$$

где $f(\overline{x}'_1,\overline{x}'_2,\overline{x}'_3,\overline{x}'_4,\overline{x}'_5)$ – некоторый многочлен от переменных $\overline{x}'_1$, $\overline{x}'_2$, $\overline{x}'_3$, $\overline{x}'_4$, $\overline{x}'_5$, не содержащий $\overline{x}'_6$. Поскольку элементы $\overline{x}'_1\overline{x}'_6$, $\overline{x}'_2\overline{x}'_6$, $\overline{x}'_3\overline{x}'_6$, $\overline{x}'_4\overline{x}'_6$, $\overline{x}'_5\overline{x}'_6$, $\overline{x}'_6\overline{x}'_6$ линейно независимы, то

$$p_{11}p_{62}+p_{12}p_{61}+p_{13}p_{64}+p_{14}p_{63}-p_{15}p_{66}-p_{16}p_{65}=0;$$
$$p_{21}p_{62}+p_{22}p_{61}+p_{23}p_{64}+p_{24}p_{63}-p_{25}p_{66}-p_{26}p_{65}=0;$$
$$p_{31}p_{62}+p_{32}p_{61}+p_{33}p_{64}+p_{34}p_{63}-p_{35}p_{66}-p_{36}p_{65}=0;$$
$$p_{41}p_{62}+p_{42}p_{61}+p_{43}p_{64}+p_{44}p_{63}-p_{45}p_{66}-p_{46}p_{65}=0;$$
$$p_{51}p_{62}+p_{52}p_{61}+p_{53}p_{64}+p_{54}p_{63}-p_{55}p_{66}-p_{56}p_{65}=0;$$
$$p_{61}p_{62}+p_{63}p_{64}-p_{65}p_{66}=0.$$

Изменив последнее уравнение, получим

$$p_{11}p_{62} + p_{12}p_{61} + p_{13}p_{64} + p_{14}p_{63} - p_{15}p_{66} - p_{16}p_{65} = 0;$$
$$p_{21}p_{62} + p_{22}p_{61} + p_{23}p_{64} + p_{24}p_{63} - p_{25}p_{66} - p_{26}p_{65} = 0;$$
$$p_{31}p_{62} + p_{32}p_{61} + p_{33}p_{64} + p_{34}p_{63} - p_{35}p_{66} - p_{36}p_{65} = 0;$$
$$p_{41}p_{62} + p_{42}p_{61} + p_{43}p_{64} + p_{44}p_{63} - p_{45}p_{66} - p_{46}p_{65} = 0;$$
$$p_{51}p_{62} + p_{52}p_{61} + p_{53}p_{64} + p_{54}p_{63} - p_{55}p_{66} - p_{56}p_{65} = 0;$$
$$p_{61}p_{62} + p_{62}p_{61} + p_{63}p_{64} + p_{64}p_{63} - p_{65}p_{66} - p_{66}p_{65} = 0.$$

Отсюда

$$(p_{62}, p_{61}, p_{64}, p_{63}, -p_{66}, -p_{65}) \cdot P^T = 0.$$

Так как матрица P невырожденная, то полученное равенство невозможно. Противоречие. $\square$

Из следствия 3 и предложения 4 вытекает справедливость следующего утверждения.

Следствие 4. *Если в многообразии колец $\mathfrak{M}$ все конечные кольца однозначно определяются своими графами делителей нуля, то для любого нечетного простого числа p многообразие $\mathfrak{M}$ не содержит многообразия $\mathfrak{M}_{2,p}$.*

Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие, в котором все конечные кольца однозначно определяются своими графами делителей нуля. В работе [1] доказано, что $T(\mathfrak{M})$ содержит многочлены вида mx, $dx + x^2g(x)$, причем $m = p_1^{\alpha_1} \dots p_s^{\alpha_s}$, $\alpha_i \leq 3$ для всех $i \leq s$, $g(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $d = 1$ или $d = p_{i_1} \dots p_{i_k}$, где $p_{i_1}, \dots, p_{i_k}$ – попарно различные простые делители числа m.

Далее, пусть $\mathfrak{N}_i = var\,\langle p_i^{\alpha_i}x = 0\rangle \cap \mathfrak{M}$, где $1 \leq i \leq s$. Тогда $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_1 \vee \dots \vee \mathfrak{N}_s$ и $T(\mathfrak{M}) = T(\mathfrak{N}_1) \cap \dots \cap T(\mathfrak{N}_s)$.

Лемма 7. *Если кольцо A удовлетворяет тождеству $x(y - y^n) = 0$, $n \geq 2$, а кольцо B удовлетворяет тождеству $x(y - y^m) = 0$, $m \geq 2$, то в кольце $A \oplus B$ выполняется тождество*

$$x(y - y^{(n-1)(m-1)+1}) = 0.$$

Доказательство. Пусть a, b — произвольные элементы из кольца A. Тогда

$$ab = ab^n = ab \cdot b^{n-1} = (ab \cdot b^{n-1})b^{n-1} = ab \cdot b^{2(n-1)} = \dots = ab^{1+(n-1)t},$$

где t — произвольное неотрицательное целое число. Другими словами, в кольце A выполняются тождества $xy = xy^{1+(n-1)t}$, $t \geq 1$. Аналогично доказывается, что кольцо B удовлетворяет тождествам $xy = xy^{1+(m-1)s}$, где s — произвольное целое неотрицательное число. Значит, $xy = xy^{1+(n-1)(m-1)}$ — тождество в кольце $A \oplus B$. $\square$

Предложение 5. *$T(\mathfrak{N}_i)$ содержит многочлен $x(y - y^{p_i})$, $i = 1, \ldots, s$.*

Доказательство. Из работы [7] следует, что $T(\mathfrak{N}_i)$ содержит многочлены вида $p_i^{\alpha_i} x$ и $dx + x^2 f(x)$, где $d = 1$ или $d = p_i$, $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $\alpha_i \leq 3$. Если $d = 1$, то идеал тождеств $T(\mathfrak{N}_i)$ содержит многочлен $x + x^2 f(x)$, и из [2] следует, что $\mathfrak{N}_i$ порождается полем $\mathbb{Z}_{p_i}$ или $\mathfrak{N}_i = var\,\langle x = 0\rangle$. В каждом из этих случае получаем, что $T(\mathfrak{N}_i)$ содержит многочлен $x(y - y^{p_i})$.

Рассмотрим случай, когда $d = p_i$, т.е. $p_i x + x^2 f(x) \in T(\mathfrak{N}_i)$. Из следствия 2 имеем, что многообразие $\mathfrak{N}_i$ не содержит многообразия $\mathfrak{M}_{1,p_i}$. Это означает, что существует многочлен $g(x_1, \ldots, x_N) \in T(\mathfrak{N}_i)$, существенно зависящий от переменных $x_1, \ldots, x_N$, такой, что $g(x_1, \ldots, x_N) \notin \{xyz, x^2, p_i x\}^T$. Ясно, что $N \leq 2$.

Пусть $N = 1$. В этом случае многочлен g можно записать в виде:

$$g(x) = bx + ap_i x + x^2 h(x),$$

где $h(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $a, b \in \mathbb{Z}$, причем число b не делится на p_i, По лемме о НОД существуют целые числа u, v, такие, что $bu + p_i v = 1$. Поскольку $p_i x + x^2 f(x) \in T(\mathfrak{N}_i)$, то $T(\mathfrak{N}_i)$ содержит многочлен вида $g_1(x) = x + cp_i x + x^2 h_1(x)$ для некоторых $c \in \mathbb{Z}$ и $h_1(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Отсюда, наконец, получаем, что

$$\left(x + cp_i x + x^2 h_1(x)\right) - c\left(p_i x + x^2 f(x)\right) = x + x^2(h_1(x) - cf(x)) \in \mathfrak{N}_\mathrm{i}.$$

Из [7] следует, что $T(\mathfrak{N}_i)$ содержит многочлен $x(y - y^{p_i})$.

Пусть теперь $N = 2$. Тогда можем записать

$$g(x, y) = \alpha xy + \beta(x \circ y) + \gamma p_i xy + \varphi(x, y),$$

где $\varphi(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Z}$, причем число α не делится на p_i, а нижняя степень многочлена $\varphi(x, y)$ больше 2. По лемме о НОД существуют целые числа u, v, такие, что $\alpha u + p_i v = 1$. Поэтому $T(\mathfrak{N}_i)$ содержит многочлен

$$\begin{aligned} g_1(x, y) = & ug(x, y) = u\alpha xy + u\beta(x \circ y) + u\gamma p_i xy + u\varphi(x, y) = \\ = & xy + u\beta(x \circ y) + (u\gamma - v)p_i xy + u\varphi(x, y) = \\ = & xy + u\beta(x \circ y) + (u\gamma - v)\left(-x^2y^2 f(xy)\right) + u\varphi(x, y) = \\ = & xy + \beta_1(x \circ y) + \varphi_1(x, y), \end{aligned}$$

где $\beta_1 = u\beta$ и $\varphi_1(x, y)$ — некоторый многочлен с целыми коэффициентами, нижняя степень которого больше 2. Итак, $T(\mathfrak{N}_i)$ содержит многочлен

$$g_1(x, y) = xy + \beta_1(x \circ y) + \varphi_1(x, y),$$

где $\beta_1 \in \mathbb{Z}$ и $\varphi_1(x, y)$ — многочлен с целыми коэффициентами, нижняя степень которого больше 2.

Рассмотрим случай, когда $p_i = 2$. Тогда

$$g_1(x,x) = x^2 + 2\beta_1 x^2 + \varphi_1(x,x) = x^2 + \beta_1\left(-x^4 f(x^2)\right) + \varphi_1(x,x) = x^2 + x^3\varphi_2(x) \in T(\mathfrak{N}_i)$$

для некоторого многочлена $\varphi_2(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Отсюда следует, что многообразие $\mathfrak{N}_i$ удовлетворяет тождеству вида $x \circ y + \psi(x,y) = 0$, где $\psi(x,y) \in \mathbb{Z}[x,y]$, причем нижняя степень многочлена $\psi(x,y)$ больше 2. Следовательно,

$$g_1(x,y) = xy + \beta_1\left(-\psi(x,y)\right) + \varphi_1(x,y) = xy + \psi_1(x,y),$$

где $\psi_1(x,y) = -\beta_1\psi(x,y) + \varphi_1(x,y)$ — многочлен, нижняя степень которого больше 2. Из теоремы 1 работы [7] имеем, что $\mathfrak{N}_i \subseteq var\ N_{0,2} \oplus \mathbb{Z}_2$. Следовательно, многообразие $\mathfrak{N}_i$ удовлетворяет тождеству $x(y - y^2) = 0$.

Рассмотрим теперь случай, когда p_i — нечетное число. Из следствия 4 имеем, что многообразие $\mathfrak{N}_i$ не содержит многообразия $\mathfrak{M}_{2,p_i}$. Значит, существует многочлен $p(x_1,\ldots,x_M) \in T(\mathfrak{N}_i)$, существенно зависящий от переменных $x_1,\ldots,x_M$, такой, что $p(x_1,\ldots,x_M) \notin \{xyz, [x,y], p_i x\}^T$. Ясно, что $M \leq 2$.

Положим сначала $M = 1$. Тогда можем записать

$$p(x) = \lambda x + \mu p_i x + \nu x^2 + \delta p_i x^2 + x^3\sigma(x),$$

где $\sigma(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $\lambda, \mu, \nu, \delta \in \mathbb{Z}$, причем либо λ — ненулевое число, не делящееся на p_i, либо ν — ненулевое число, не делящееся на p_i. Пусть λ не равно нулю и взаимно просто с числом p_i. Тогда лемме о НОД существуют целые числа u, v, такие, что $\lambda u + p_i v = 1$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} up(x) =& x + p_i(\mu u - v)x + \nu u x^2 + \delta u p_i x^2 + u x^3\sigma(x) = \\ =& x + (\mu u - v)(-x^2 f(x)) + \nu u x^2 + \delta u p_i x^2 + u x^3 \sigma(x), \end{aligned}$$

т.е. $\mathfrak{N}_i$ удовлетворяет тождеству вида $x + x^2 q(x) = 0$, где $q(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Ранее мы отмечали, что в этом случае $x(y - y^{p_i}) \in T(\mathfrak{N}_i)$. Пусть теперь $\lambda = 0$. Тогда число ν не равно нулю и не делится на p_i. Отсюда следует, что лемме о НОД существуют целые числа u, v, такие, что $\nu u + p_i v = 1$. Значит, имеем

$$\begin{aligned} up(x) =& \mu u p_i x + x^2 + p_i(\delta u - v)x^2 + u x^3\sigma(x) = \\ =& \mu u p_i x + x^2 + (\delta u - v)(-x^4 f(x^2)) + u x^3\sigma(x) = \mu u p_i x + x^2 + x^3\sigma_1(x) \end{aligned}$$

для некоторого многочлена $\sigma_1(x) \in \mathbb{Z}[x]$. Линеаризуя многочлен $\mu u p_i x + x^2 + x^3\sigma_1(x)$, мы получим, что идеал тождеств $T(\mathfrak{N}_i)$ содержит многочлен вида $x \circ y + w(x,y)$, где $w(x,y)$ — некоторый многочлен с целыми коэффициентами, нижняя степень которого больше 2. Из тождеств $x \circ y + w(x,y) = 0$ и $g_1(x,y) = 0$ получаем, что $T(\mathfrak{N}_i)$ содержит многочлен вида $xy + w_1(x,y)$, где $w_1(x,y) \in \mathbb{Z}[x,y]$ и нижняя степень многочлена $w_1(x,y)$

больше 2. По теореме 1 статьи [7] следует, что многообразие $\mathfrak{N}_i$ удовлетворяет тождеству $x(y - y^{p_i}) = 0$.

Пусть, наконец, $M = 2$. Тогда можем записать

$$p(x, y) = \lambda_1 xy + \mu_1[x, y] + \nu_1 p_i xy + \omega(x, y),$$

где $\lambda_1, \mu_1, \nu_1 \in \mathbb{Z}$, причем λ_1 не делится на p_i, и $\omega(x, y)$ — многочлен с целыми коэффициентами, нижняя степень которого больше 2. Используя лемму о НОД так же, как это было сделано выше, мы можем считать, что $\lambda_1 = 1$, т.е.

$$p(x, y) = xy + \mu_1[x, y] + \nu_1 p_i xy + \omega(x, y).$$

Пользуясь тождеством $p_i x + x^2 f(x) = 0$, получаем, что

$$p(x, y) = xy + \mu_1[x, y] + \nu_1(-x^2y^2 f(xy)) + \omega(x, y) = xy + \mu_1[x, y] + \omega_1(x, y)$$

для некоторого многочлена $\omega_1(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$, нижняя степень которого больше 2. Тогда $p(x, x) = x^2 + x^3\omega_2(x)$, где $\omega_2 \in \mathbb{Z}[x]$. Линеаризуя тождество $p(x, x) = 0$, получим, что многообразие $\mathfrak{N}_i$ удовлетворяет тождеству вида $x \circ y + w(x, y) = 0$, где $w(x, y)$ — некоторый многочлен с целыми коэффициентами, нижняя степень которого больше 2. Из тождеств $x \circ y + w(x, y) = 0$ и $g_1(x, y) = 0$ следует тождество вида $xy + w_1(x, y) = 0$, где $w_1(x, y) \in \mathbb{Z}[x, y]$ и нижняя степень многочлена $w_1(x, y)$ больше 2. По теореме 1 статьи [7] получаем, что многообразие $\mathfrak{N}_i$ удовлетворяет тождеству $x(y - y^{p_i}) = 0$. $\square$

Из предложения 5 и леммы 7 получаем следующее утверждение.

Следствие 5. *Пусть $\mathfrak{M}$ — многообразие, в котором все конечные кольца однозначно определяются своими графами делителей нуля. Тогда $T(\mathfrak{M})$ содержит многочлен вида $x(y - y^N)$, где $N \geq 2$.*

Теперь мы можем доказать основной результат настоящей работы.

Теорема 1. *Для любого многообразия $\mathfrak{M}$ ассоциативных колец следующие условия эквивалентны:*

(1) Произвольное конечное кольцо из $\mathfrak{M}$ однозначно определяется своим графом делителей нуля;

(2) $\mathfrak{M} \subseteq var\langle N_{0,p_1} \oplus \ldots \oplus N_{0,p_s} \oplus \mathbb{Z}_p\rangle$, где $s \in \mathbb{N}$ и $(p_i, p) \neq (3, 2)$ для любого числа $i \in \{1, \ldots, s\}$.

Доказательство. Импликация (2) $\Rightarrow$ (1) следует из предложения 4 работы [1]. Докажем импликацию (1) $\Rightarrow$ (2). Пусть в многообразии $\mathfrak{M}$ все конечные кольца однозначно определяются своими графами делителей нуля. Тогда по следствию 5 идеал тождеств $T(\mathfrak{M})$ содержит многочлен вида $x(y - y^N)$, где $N \geq 2$. По теореме 1.1 из статьи [7] имеем, что $\mathfrak{M} \subseteq var\langle N_{0,p_1} \oplus \ldots \oplus N_{0,p_s} \oplus \mathbb{Z}_p\rangle$, где $s \in \mathbb{N}$ и $(p_i, p) \neq (3, 2)$ для любого числа $i \in \{1, \ldots, s\}$. $\square$

Список литературы

[1] Кузьмина А.С. О некоторых свойствах многообразий колец, в которых конечные кольца однозначно определяются своими графами делителей нуля [Электронный ресурс]// Сибирские электронные математические известия. – 2011. – №8. – С. 179–190.

[2] Джекобсон Н. Строение колец. – М.: Изд-во иностр. литературы, 1961. – 392 с.

[3] Akbari S., Mohammadian A. On the zero-divisor graph of a commutative ring// Journal of Algebra. – 2004. – 274. – p.847–855.

[4] Akbari S., Mohammadian A. On zero-divisor graphs of finite rings// Journal of Algebra. – 2007. – 314. – p.168–184.

[5] Anderson D.F., Livingston P.S. The Zero-Divisor Graph of a Commutative Ring // Journal of Algebra. – 1999. – 217. – № 2. – p. 434–447.

[6] Beck I. Coloring of Commutative Rings // Journal of Algebra. – 1988. – 116. – p.208–226.

[7] Kuzmina A.S., Maltsev Y.N. On varieties of rings whose finite rings are determined by their zero-divisor graphs, http:// arxiv.org/abs/1201.3441, to appear in Asian-European J. Math.

[8] Tarski A. *Equationally complete rings and relation algebras*, Indag. Math., **18** (1956), 39–46.